Schulinterner Lehrplan für das Fach

Mathematik

am Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasium

Sekundarstufe II

Stand 07.11.2025

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit 3

2 Entscheidungen zum Unterricht 7

2.1 Unterrichtsvorhaben 7
2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben 9
2.1.2 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben 20
2.1.3 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben 22
2.1.4 Inhalte des Vertiefungskurses in der Einführungsphase 107

2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit 108

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung 111

2.4 Lehr- und Lernmittel 118

2.5 Methodencurriculum 120

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen 124

4 Qualitätssicherung und Evaluation 125

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Fachliche Bezüge zum Leitbild der Schule

Das Gauß-Gymnasium ist eines von vier öffentlichen Gymnasien der Altstadt Gelsenkirchens. Es liegt im Innenstadtbereich und hat eine entsprechend heterogene Schülerschaft, was den sozialen und ethnischen Hintergrund betrifft. Das Gauß-Gymnasium ist in der Sekundarstufe I dreizügig und wird als Halbtagsgymnasium mit offenem Ganztagsangebot geführt.

In unserem Schulprogramm formulieren wir als Leitgedanken für die gemeinsame Arbeit und als grundlegendes Ziel unserer Schule, die persönliche Entwicklung in sozialer Verantwortung aller am Schulleben beteiligten Personen gewissenhaft in den Blick zu nehmen und alle Lernenden bestmöglich zu fördern. Es ist uns ein wichtiges Anliegen, Lernen in eigener Verantwortung aktiv erfahrbar zu machen.

Dabei greift das Fach Mathematik in allen Inhaltsbereichen aktuelle und für Schülerinnen und Schüler relevante Themen z.B. des Verbraucherschutzes, der Digitalisierung, der ökologischen Bildung auf. Durch das Lernen mit verschiedenen auch digitalen Medien in unterschiedlichen Sozialformen und unter Berücksichtigung individueller Lernwege werden altersgerecht Aufgeschlossenheit und Neugier geweckt und Schülerinnen und Schüler zu eigenständigem Handeln angeleitet. Die Mathematik steht durch ihre Universalität in enger Verbindung zu einer Vielzahl anderer Disziplinen der Geistes- und Naturwissenschaften. Eine verstärkte Zusammenarbeit und Koordinierung der Fachbereiche ermöglicht komplexe Lerngegenstände umfassend darzustellen und Bezüge zwischen Inhalten der Fächer herzustellen, sodass ein wesentlicher Beitrag zur vertieften Allgemeinbildung geleistet werden kann. An Problemstellungen werden vorhandene Kenntnisse selbstständiger Lern- und Denkstrategien aufgegriffen und weiterentwickelt.

Gemäß dem Schulprogramm sollen insbesondere die Lernenden als Individuen mit jeweils besonderen Fähigkeiten, Stärken und Interessen im Mittelpunkt stehen. Die Fachgruppe vereinbart, der individuellen Kompetenzentwicklung und den herausfordernd und kognitiv aktivierenden Lehr- und Lernprozessen besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Die Planung und Gestaltung des Unterrichts soll sich deshalb an der Heterogenität der Schülerschaft orientieren.

Durch ein fachliches Förderprogramm (DELTA-Projekt) unter Einbeziehung von Schülerinnen und Schülern als Tutoren, begleitet durch Sprechstunden der Lehrkräfte und getroffene Lernvereinbarungen, werden Schülerinnen und Schüler mit Übergangs- und Lernschwierigkeiten intensiv unterstützt.

Interessierte Schülerinnen und Schüler aller Jahrgangsstufen erhalten die Möglichkeit an verschiedenen Wettbewerben (u.a. Känguru-Wettbewerb, Mathematikolympiade, SAMMS, SIMMS, SMIMS) teilzunehmen.

Materialien zum individualisierten Lernen (z.B. Arbeitsblätter, Lernvideos, Online-Kurse) werden auf der Schulhomepage angeboten und unterstützen die Lernenden beim Kompetenzerwerb.

Fachliche Bezüge zu den Rahmenbedingungen des schulischen Umfelds
In die Einführungsphase der Sekundarstufe II wurden in den letzten Jahren regelmäßig etwa fünf Schülerinnen und Schüler aus Real- und Hauptschulen neu aufgenommen.
In der Regel werden in der Einführungsphase drei parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Q-Phase ein Leistungs- und zwei Grundkurse entwickeln.
Der Unterricht der Erprobungsstufe zum einen und der Einführungsphase (EF) zum anderen ist darauf abgestimmt, dass den Schülerinnen und Schülern der Wechsel an das Gymnasium gelingt. Mit den Mathematikkolleginnen und -kollegen der kooperierenden Schulen finden einmal jährlich Treffen statt, in welchen Absprachen für einen möglichst reibungslosen Übergang im Fach Mathematik getroffen werden.
Die Fachkonferenz tritt mindestens einmal pro Schuljahr zusammen, um notwendige Absprachen zu treffen. Zusätzlich treffen sich die Kolleginnen und Kollegen innerhalb jeder Jahrgangsstufe zu weiteren Absprachen. Dieses Vorhaben wird durch die Schulleitung unterstützt.
Um die Lehrkräfte bei der Unterrichtsplanung zu unterstützen, werden Materialien von Schulbuchverlagen an bekannter zentraler Stelle bereitgestellt. Klassenarbeiten und Klausuren werden für alle Fachkollegen zugänglich in IServ gesammelt. Diese Materialien werden im Rahmen der Unterrichtsentwicklung laufend ergänzt, überarbeitet und weiterentwickelt.

Fachliche Bezüge zu schulischen Standards zum Lehren und Lernen
Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu geben, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet. Schülerinnen und Schüler aller Klassen werden zur Teilnahme an mathematischen Wettbewerben motiviert (s.o.).
Der Unterrichtsalltag ist rhythmisiert und weist für die Kernfächer vornehmlich Doppelstunden (90-Minuten-Blöcke) aus.
Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden. In der Sekundarstufe II wird verlässlich darauf aufgebaut, dass die Verwendung von Kontexten im Mathematikunterricht bekannt ist.
In der Sekundarstufe I wird ein MMS (GeoGebra) ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt (siehe Lehrplan SI). In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Gendergerechte Aspekte für den Unterricht

Genderkonzept	Unterrichtsgestaltung
• Unterrichtsinhalte sollen gleichermaßen alle Geschlechter ansprechen. • Es sollen Rollengegenerfahrungen bewusst gemacht werden. • Es soll Mut gemacht werden, auch geschlechtsuntypische Themen zu wählen. • Unterrichtsinhalte sollen zur kritischen Auseinandersetzung mit den Geschlechterrollen anregen. • Die Vielfalt der sexuellen Orientierungen sowie ein toleranter Umgang mit dieser sollen im Unterricht thematisiert werden. • Lehrmittel, die zukünftig eingeführt werden, sollen Geschlechtergerechtigkeit berücksichtigen. • Leistungen sollen frei von geschlechtertypischen Verhaltenszuschreibungen gewertet werden (z.B. Sorgfalt, Ordnungssinn, soziales Verhalten, Fleiß).	• Im Unterricht auf gute Zusammenarbeit zwischen den Geschlechtern achten. • Bei Gruppenarbeit unterschiedliche Gruppenzusammensetzungen ausprobieren. • Kein Zwang zur Zusammenarbeit unterschiedlicher Geschlechter, aber auch keine herabwürdigenden Kommentare zulassen, wenn solche Gruppen sich bilden. • Als Lehrperson abwechselnd Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Geschlechter drannehmen.

Folgende Kolleginnen und Kollegen gehören zur Fachschaft Mathematik des Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasiums:

Kollege / Kollegin	Fächer	besondere Aufgaben
Daamen, Sven	M, PH	
Eisenberg, Rebecca	M	Sozialpädagogischer Unterricht
Feierabend, Nils	M, KU	
Kakoschke, Annette	M, CH	Stellvertretender Fachvorsitz
König, Laura	M, SW	Organisation Känguru-Wettbewerb und Matheolympiade
Krude, Andreas	M, SP	Organisation Delta
Thunig, Elisabeth	M, PA	
Vogt, Simon	Ph, M, ER	Fachvorsitz, Organisation Känguru-Wettbewerb
Zimmermann, Benjamin	M, BI	
Referendare/ Referendarinnen und Vertretungslehrkräfte		
Lukas Alex (ab 11.2025)	M, GE	Referendar

2 Entscheidungen zum Unterricht

Die Umsetzung des Kernlehrplans mit seinen verbindlichen Kompetenzerwartungen im Unterricht erfordert Entscheidungen auf verschiedenen Ebenen:
Die Übersicht über die Unterrichtsvorhaben gibt den Lehrkräften eine rasche Orientierung bezüglich der laut Fachkonferenz verbindlichen Unterrichtsvorhaben und der damit verbundenen Schwerpunktsetzungen für jedes Schuljahr.
Die Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan sind die vereinbarte Planungsgrundlage des Unterrichts. Sie bilden den Rahmen zur systematischen Anlage und Weiterentwicklung sämtlicher im Kernlehrplan angeführter Kompetenzen, setzen jedoch klare Schwerpunkte. Sie geben Orientierung, welche Kompetenzen in einem Inhaltsfeld besonders gut entwickelt werden können und berücksichtigen dabei die obligatorischen Inhaltsfelder und inhaltlichen Schwerpunkte. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans bei den Lernenden auszubilden und zu fördern.
In weiteren Absätzen dieses Kapitels werden Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit, Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung sowie Entscheidungen zur Wahl der Lehr- und Lernmittel festgehalten, um die Gestaltung von Lernprozessen und die Bewertung von Lernergebnissen im erforderlichen Umfang auf eine verbindliche Basis zu stellen.

2.1 Unterrichtsvorhaben

In der nachfolgenden Übersicht über die Unterrichtsvorhaben wird die für alle Lehrerinnen und Lehrer gemäß Fachkonferenzbeschluss verbindliche Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Die Übersicht dient dazu, für die einzelnen Jahrgangsstufen allen am Bildungsprozess Beteiligten einen schnellen Überblick über Themen bzw. Fragestellungen der Unterrichtsvorhaben unter Angabe besonderer Schwerpunkte in den Inhalten und in der Kompetenzentwicklung zu verschaffen. Dadurch soll verdeutlicht werden, welches Wissen und welche Fähigkeiten in den jeweiligen Unterrichtsvorhaben besonders gut zu erlernen sind und welche Aspekte deshalb im Unterricht hervorgehoben thematisiert werden sollten. Unter den Hinweisen des Übersichtsrasters werden u.a. Möglichkeiten im Hinblick auf inhaltliche Fokussierungen und interne Verknüpfungen sowie Möglichkeiten der Vertiefung ausgewiesen.
Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Der schulinterne Lehrplan ist so gestaltet, dass er zusätzlichen Spielraum für Vertiefungen, besondere Schülerinteressen, aktuelle Themen bzw. die Erfordernisse anderer besonderer Ereignisse (z.B. Praktika, Klassenfahrten o.Ä.) belässt. Abweichungen über die notwendigen Absprachen hinaus sind im Rahmen des pädagogischen Gestaltungsspielraumes der Lehrkräfte möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Die Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden.

Die „konkretisierten Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.3) dienen der standardbezogenen Orientierung und haben empfehlenden Charakter. Begründete Abweichungen sind unter Berücksichtigung der ausgewiesenen Kompetenzen des Kernlehrplans möglich.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<table>
<tr><th colspan="2">Einführungsphase</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>
(Buch Kapitel 1 und 2)

Thema:
Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundlegende Eigenschaften von Potenzfunktionen und ganzrationalen Funktionen

Zeitbedarf: 24 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>
(Buch Kapitel 3)

Thema:
Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs

Zeitbedarf: 20 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>
(Buch Kapitel 4)

Thema:
Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 20 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>
(Buch Kapitel 5)

Thema:
Koordinatisierungen des Raumes: Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Koordinatisierungen des Raumes
• Vektoren und Vektoroperationen
• Geradengleichungen und Lage

Zeitbedarf: 30 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Summe Einführungsphase: 94 Stunden</td></tr>
</table>

Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS	
Unterrichtsvorhaben I: (Buch Kapitel 1) **Thema:** Optimierungsprobleme (GK-A1) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) **Zeitbedarf**: ca. 13 Std	**Unterrichtsvorhaben II:** (Buch Kapitel 1) **Thema:** Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (GK-A2) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) **Zeitbedarf**: ca. 7 Std
Unterrichtsvorhaben III: (Buch Kapitel 2) **Thema:** Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (GK-A3) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Kettenregel • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$ **Zeitbedarf**: ca. 13 Std	**Unterrichtsvorhaben IV:** (Buch Kapitel 3) **Thema:** Von der Änderungsrate zum Bestand (GK-A4) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **Zeitbedarf**: ca. 8 Std

Unterrichtsvorhaben V: (Buch Kapitel 3) **Thema:** Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (GK-A5) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **Zeitbedarf**: ca. 12 Std	**Unterrichtsvorhaben VI:** (Buch Kapitel 5) **Thema:** Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (inklusive LGS) (GK-G1) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Vektoroperation: Skalarprodukt • Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra) **Zeitbedarf**: ca. 18 Std
Unterrichtsvorhaben VII: (Buch Kapitel 5) **Thema:** Ebenen in Koordinaten- und Parameterform (GK-G2) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor • Schnittpunkte: Geraden und Ebenen • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: ca. 12 Std	**Unterrichtsvorhaben VIII:** (Buch Kapitel 5) **Thema:** Untersuchungen an geometrischen Körpern (GK-G3) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor • Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen • Schnittpunkte: Geraden und Ebenen **Zeitbedarf**: ca. 10 Std
Summe Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS: ca. 93 Stunden	

Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS	
Unterrichtsvorhaben IX: (Buch Kapitel 6) **Thema:** Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Mehrstufige Zufallsexp.: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung • Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen **Zeitbedarf**: ca. 17 Std	**Unterrichtsvorhaben X:** (Buch Kapitel 7) **Thema:** Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (GK-S2) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Mehrstufige Zufallsexp.: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme **Zeitbedarf**: ca. 10 Std
Unterrichtsvorhaben XI: (Buch Kapitel 7) **Thema:** Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (GK-S3) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung • Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme **Zeitbedarf**: ca. 11 Std	**Unterrichtsvorhaben XII:** (Buch Kapitel 2) **Thema:** Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (GK-A6) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen **Zeitbedarf**: ca. 9 Std

Unterrichtsvorhaben XIII: (Buch Kapitel 4) **Thema:** Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (GK-A7) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **Zeitbedarf**: ca. 11 Std	
Summe Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS: ca. 58 Stunden	

Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS	
Unterrichtsvorhaben I: (Buch Kapitel 1) **Thema:** Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern (LK-A1) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)+d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) **Zeitbedarf**: ca. 18 Std	**Unterrichtsvorhaben II:** (Buch Kapitel 1) **Thema:** Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (LK-A2) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)+d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf, Definitions- & Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x\to\pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) **Zeitbedarf**: ca. 13 Std
Unterrichtsvorhaben III: (Buch Kapitel 1) **Thema:** Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen (LK-A3) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)+d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x\to\pm\infty$ **Zeitbedarf**: ca. 8 Std	**Unterrichtsvorhaben IV:** (Buch Kapitel 2) **Thema:** Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (LK-A4) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)+d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x\to\pm\infty$, Kettenregel **Zeitbedarf**: ca. 15 Std

Unterrichtsvorhaben V: (Buch Kapitel 3) **Thema:** Von der Änderungsrate zum Bestand (LK-A5) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **Zeitbedarf**: ca. 10 Std	**Unterrichtsvorhaben VI:** (Buch Kapitel 3) **Thema:** Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (LK-A6) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **Zeitbedarf**: ca. 18 Std
Unterrichtsvorhaben VII: (Buch Kapitel 5) **Thema:** Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen inklusive LGS (LK-G1) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Vektoroperation: Skalarprodukt • Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra) **Zeitbedarf**: ca. 14 Std	**Unterrichtsvorhaben VIII:** (Buch Kapitel 5) **Thema:** Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen (LK-G2) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform • Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen • Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen) **Zeitbedarf**: ca. 10 Std

Unterrichtsvorhaben XI: (Buch Kapitel 5) **Thema:** Parametrisierung von Ebenen (LK-G3) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: ca. 8 Std	**Unterrichtsvorhaben X:** (Buch Kapitel 6) **Thema:** Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (LK-G4) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen) **Zeitbedarf**: ca. 6 Std
Unterrichtsvorhaben XI: (Buch Kapitel 6) **Thema:** Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder (LK-G5) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform • Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen • Schnittpunkte: Geraden und Ebenen • Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen) **Zeitbedarf**: ca. 10 Std	
Summe Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS: ca. 130 Stunden	

Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS	
Unterrichtsvorhaben XII: (Buch Kapitel 7) **Thema:** Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (LK-S1) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung • Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen **Zeitbedarf**: ca. 18 Std	**Unterrichtsvorhaben XIII:** (Buch Kapitel 8) **Thema:** Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (LK-S2) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln **Zeitbedarf**: ca. 12 Std
Unterrichtsvorhaben XIV: (Buch Kapitel 8) **Thema:** Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (LK-S3) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung • Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln • Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang **Zeitbedarf**: ca. 15 Std	**Unterrichtsvorhaben XV:** (Buch Kapitel 8) **Thema:** Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen (LK-S4) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang **Zeitbedarf**: ca. 10 Std

Unterrichtsvorhaben XVI: (Buch Kapitel 9) **Thema:** Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen (LK-S5) **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve"), Parameter μ und σ, Graph der Verteilungsfunktion **Zeitbedarf**: ca. 10 Std	**Unterrichtsvorhaben XVII:** (Buch Kapitel 2) **Thema:** Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (LK-A7) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)+d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x\to\pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben") **Zeitbedarf**: ca. 20 Std
Unterrichtsvorhaben XVIII: (Buch Kapitel 4) **Thema:** Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (LK-A8) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)+d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich,	

Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **Zeitbedarf**: ca. 20 Std	
Summe Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS: ca. 105 Stunden	

2.1.2 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

E-Phase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-A1	24
II	E-A2	20
III	E-A3	20
IV	E-G	30
	Summe:	94
Q1 Grundkurs		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-GK-A1	13
II	Q-GK-A2	7
III	Q-GK-A3	13
IV	Q-GK-A4	8
V	Q-GK-A5	12
VI	Q-GK-G1	18
VII	Q-GK-G2	12
VIII	Q-GK-G3	10
	Summe:	93
Q2 Grundkurs		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
IX	Q-GK-S1	17
X	Q-GK-S2	10
XI	Q-GK-S3	11
XII	Q-GK-A6	9
XIII	Q-GK-A7	11
	Summe:	58

Q1 Leistungskurs		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-LK-A1	18
II	Q-LK-A2	13
III	Q-LK-A3	8
IV	Q-LK-A4	15
V	Q-LK-A5	10
VI	Q-LK-A6	18
VII	Q-LK-G1	14
VIII	Q-LK-G2	10
IX	Q-LK-G3	8
X	Q-LK-G4	6
XI	Q-LK-G5	10
	Summe:	130
Q2 Leistungskurs		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
XII	Q-LK-S1	18
XIII	Q-LK-S2	12
XIV	Q-LK-S3	15
XV	Q-LK-S4	10
XVI	Q-LK-S5	10
XVII	Q-LK-A7	20
XVIII	Q-LK-A8	20
	Summe:	105

2.1.3 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Hinweis: Thema, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz des Gauß-Gymnasiums verbindlich vereinbart. In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich. Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 2.2 bis 2.4 übergreifende sowie z. T. auch jahrgangsbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden.

Thema: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)
Zeitbedarf ca. 24 Stunden

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelungen an den Koordinatenachsen, Verschiebungen, Streckungen

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)
(1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,
(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.
(3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),
(4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Die Potenzfunktionen mit ganzrationalen Exponenten werden mithilfe des MMS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitions- und Wertebereich, Verhalten für $x \to \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und systematisiert. Die Herausforderungen der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und mit Blick auf die Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und betrachtet. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische

Rechentechniken der SI ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Der entdeckende Einstieg in das Thema Einfluss von Parametern und Transformationen mithilfe des MMS erfolgt mit einem anwendungsbezogenen Kontext (z.B. „Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenscheindauer“), bei dem die aus der SI bekannte Sinusfunktion wiederholt und in Bezug auf Fachbegriffe (Amplitude, Periode) fundiert wird. Anknüpfend an eine Systematisierung der Transformationen (Verschiebung, Streckung, jeweils in Richtung beider Achsen), ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform), werden diese auf die Sinusfunktion und auf Potenzfunktionen übertragen. Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet. Bei Transformationen ganzrationaler Funktionen werden die Auswirkungen auf die im vorherigen Unterrichtsvorhaben betrachteten Eigenschaften sowie auf Monotonie und Extrempunkte untersucht. Für algebraische Operationen und grafische Darstellungen wird in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend das MMS verwendet.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.

Materialhinweis:
Material „EF-A1 Funktionsuntersuchung mit dem MMS“ im Lehrplannavigator
Material „EF-A2 Beschreibung periodischer Vorgänge mithilfe der Sinusfunktion“ im Lehrplannavigator

Thema: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)

Zeitbedarf ca. 20 Stunden

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen und Faktorregel)

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)

(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
(6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
(7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim\limits_{x \to \ldots} f(x)$,
(8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
(10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
(11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Arg-(3)	präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(4)	erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5)	begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(9)	erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(12)	beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit
Arg-(13)	überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(2)	beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3)	erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4)	erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6)	verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(8)	wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B.: Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, …) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen soll auch eine (geometrische) Steigung im Sachzusammenhang als Kontext betrachtet werden.

Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vorstellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Geschwindigkeit genutzt.

Das MMS wird zur numerischen und grafischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) eingesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den Vorstellungen der SI problematisiert und analytisch definiert.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limesschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.

Um die Ableitungsregel für höhere Potenzen zu vermuten, nutzen die Schülerinnen und Schüler das MMS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens.

Bei innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.

Thema: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A3)
Zeitbedarf ca. 20 Stunden

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)
(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
(12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
(14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,
(15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
(16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
(17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
(18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,
(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8)	benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9)	verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(4)	erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5)	nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(8)	berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9)	entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(13)	benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(1)	stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(4)	erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5)	begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6)	entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(8)	verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(9)	erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(10)	beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Arg-(11)	ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12)	beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
Kom-(5)	formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(7)	wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(9)	dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(12)	nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
Kom-(13)	vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:
Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion 3. Grades und der Ableitungsfunktion ergibt sich die Notwendigkeit der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Gleichzeitig entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der Ausgangsfunktion und der Ableitung, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Fälle bezogen auf das Vorzeichen an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.
Ausgehend von grafischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

Thema: Koordinatisierung des Raumes: Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G)
Zeitbedarf ca. 30 Stunden

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität
- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
(2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
(4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
(5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.
(7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
(8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
(9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
(10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
(11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
(12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(8)	erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(11)	nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12)	verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Mod-(1)	erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2)	treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3)	übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5)	erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(8)	benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(2)	analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3)	wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7)	setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8)	berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9)	entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(4)	erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5)	begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6)	entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7)	nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8)	verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Kom-(2)	beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3)	erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4)	erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6)	verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7)	wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8)	wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.
Kom-(10)	konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(11)	greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:
Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z. B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung).

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schülerinnen und Schüler die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen ein MMS, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Verkettungen von Verschiebungen führen grafisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Streckenlängen) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Anschließend wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3x2-Gleichungssystem. Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die Schülerinnen und Schüler herstellen, wenn sie zugleich die auf eine Landkarte reduzierte Situation mit nur 2 Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird das MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gaußalgorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei den Steckbriefaufgaben eingeführt und geübt.

Materialhinweis:
Die Koordinatisierung des Raumes kann z.B. gewinnbringend im Kontext einer Spidercam-Steuerung entwickelt bzw. vertieft werden (vgl. Sinus-Transfer-Materialien zur Spidercam).

Vernetzung:
Physik: Kräfte und ihre Addition

Thema: Optimierungsprobleme (GK-A1)

Zeitbedarf: ca. 13 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(4) erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs,

(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:
Gestartet wird mit Optimierungsproblemen mit ganzrationalen Funktionen. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden.

Anschließend wird als Exkurs exemplarisch die Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs als Umkehrfunktion betrachtet.

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (GK-A2)

Zeitbedarf: ca. 7 Std

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:
Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext Bildung für nachhaltige Entwicklung in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen. Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Vertiefung:
Auch die Transformation der Sinus- und Kosinusfunktion kann wiederholend zur Modellierung eingesetzt werden.

Materialhinweis:
Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator
(https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Thema: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (GK-A3)

Zeitbedarf: ca. 13 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Kettenregel
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),

(10) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter der a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer wiederholenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand.

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:
Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand (GK-A4)

Zeitbedarf: ca. 8 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
(13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,
(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,

Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untersumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen.

Hinweis:
Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Materialhinweis:
Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Thema: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (GK-A5)

Zeitbedarf: ca. 12 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
(15) erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden ihn an,
(16) nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
(17) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,
(18) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,
(19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:
Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Thema: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen, inklusive LGS (GK-G1)

Zeitbedarf: ca. 18 Std

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(7) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
(8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.
(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische

Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.
Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Vernetzung:
In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie ebenfalls benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Arten von Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten wurden bereits in der EF bei den Lagebeziehungen von Geraden aufgegriffen.

Thema: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform (GK-G2)

Zeitbedarf: ca. 12 Std

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
(3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
(4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ wird anknüpfend an Geradengleichungen $a \cdot x + b \cdot y = d$ in der Ebene durch Erweitern um eine Variable eingeführt. Zur Erkundung soll eine Visualisierung mit einem MMS dienen, bei der die Achsenabschnitte $a_i = d/n_i$ (für $n_i \neq 0$) ins Spiel kommen, die in der Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ auftreten. Diese Form bietet den Vorteil, eindeutig zu sein, und erlaubt es, die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darzustellen.

Die Schnittpunktberechnung (Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Gerade (parametrisierte Punktmenge) in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Achsenabschnittsberechnung ordnet sich dabei als Spezialfall ein. Auch Spurgeraden in den Hauptebenen werden mit dem Einsetzungsprinzip ermittelt. Die Notation mithilfe des in GK-G1 eingeführten Skalarproduktes $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ führt zur Deutung von $\vec{n}$ als Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Der Einfluss von d, mit dem sich die Ebene parallel verschieben lässt, wird erkundet. Um eine Gleichung einer Ebene aus drei Punkten aufzustellen, soll dies dem Prinzip einer Steckbriefaufgabe folgend (vgl. GK-A2) mit einem 3x3-Gleichungssystem durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ erfolgen, wobei d als Parameter im MMS mitläuft oder $d = 1$ (in Sonderfällen $d = 0$) gesetzt werden kann.

Als Kontext für die anschließend zu thematisierende Parameterform einer Ebene dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Der Übergang zur Koordinatenform erfolgt als Alternative zum „Steckbriefverfahren“ auch durch die Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe eines unterbestimmten 2x3-Gleichungssystems. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform soll aber nur im Rahmen einer Differenzierung erfolgen. Der umgekehrte Übergang von der Koordinatenform zur Parameterform kann über drei Punkte (z.B. die Achsenabschnitte) bewerkstelligt werden, oder indem zwei (zu $\vec{n}$ orthogonale) Spannvektoren der Ebene aus Gleichungen des Typs $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gewonnen werden.

Vernetzung:
Ein systematisches Verfahren, lineare Gleichungssysteme auch hilfsmittelfrei in einfachen Fällen zu lösen, wurde bereits im Unterrichtsvorhaben GK-A2 eingeführt. Um hier Möglichkeiten des weiteren Übens und Wiederholens zu schaffen, können Durchstoßpunkte alternativ mit Ebenen in Parameterform in einfachen Fällen berechnet werden. Des Weiteren führt die Punktprobe bei Ebenen in Parameterform auf ein 3x2-Gleichungssystem.

Vertiefung:
Ein Normalenvektor kann mit einem MMS auch mithilfe des Vektorprodukts berechnet werden.

Thema: Untersuchungen an geometrischen Körpern (GK-G3)

Zeitbedarf: ca. 10 Std

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
(3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
(5) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
(6) nutzen Symmetriebetrachtungen in geometrischen Objekten zur Lösung von Problemstellungen und spiegeln Punkte an Ebenen in einfachen Fällen,
(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
– Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
– Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:
Geometrische Körper wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen, können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere die Grundebenen, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) werfen die Frage auf, wie sich Spiegelungen an Ebenen durchführen lassen. In einfachen Fällen, in denen der Normalenvektor in Richtung einer Koordinatenachse weist, werden die Koordinaten eines an der Ebene gespiegelten Punktes ermittelt. Der Nachweis der Symmetrie zu einer gegebenen Ebene wird durch einen Vergleich des Normalenvektors mit dem Verbindungsvektor zwischen Punkt und Spiegelpunkt geführt, wobei zusätzlich eine Punktprobe nötig ist, um zu zeigen, dass der Mittelpunkt in der Ebene liegt.

Winkel lassen sich zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmen. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Vernetzung:
Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder auf.

Vertiefung:

Die Bestimmung von Winkeln zwischen Geraden und Ebenen oder zwei Ebenen lässt Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung zu. Dadurch lässt sich ein im Unterrichtsvorhaben E-G2 begonnenes Thema ausbauen.

Summe Grundkurs Q1: 120 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 93 Unterrichtsstunden

Thema: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1)

Zeitbedarf: ca. 17 Std

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(5) bestimmen das Gegenereignis $\overline{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
(6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(7) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
(8) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
(9) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
(10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6)	beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(2)	analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3)	wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(1)	erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(3)	erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(6)	verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7)	wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus.

Umsetzung:
Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).
Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Thema: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (GK-S2)

Zeitbedarf: ca. 10 Std

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
(6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(11) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:
Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Vernetzung:

Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.

Thema: Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (GK-S3)

Zeitbedarf: ca. 11 Std

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
(12) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
(13) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,
(14) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5)	nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9)	entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Arg-(5)	begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6)	entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Kom-(2)	beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(8)	wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(12)	nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:
Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k, p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit wird bewusst als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit interpretiert. Die Genauigkeit dieser Schätzung steigt mit dem Stichprobenumfang.

Vertiefung:
In einem Sachkontext wird das Konzept der σ-Umgebungen exemplarisch behandelt.

Thema: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (GK-A6)

Zeitbedarf: ca. 9 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,

(6) wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,

(8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produktregel und Spezialfall der Kettenregel für Verknüpfungen von Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen) hergeleitet. Dazu können zunächst Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Vorgelegte Argumentationsketten werden erläutert, beurteilt und für den Beweis der Produktregel genutzt. Die Kettenregel für Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen im Exponenten kann graphisch mithilfe der bekannten Zusammenhänge beim Transformieren von Funktionsgraphen entdeckt werden.

Mithilfe der neu gewonnen Ableitungsregeln werden schließlich in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen betrachtet und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet. Dabei ist es mithilfe eines MMS oder mithilfe von vorgegebenen Ableitungen auch möglich, weitere Verkettungen von ganzrationalen Funktionen mit Exponentialfunktionen zu betrachten. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Thema: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (GK-A7)

Zeitbedarf: ca. 11 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung,

(8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,

(19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,

(20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

Umsetzung:
Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs…), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den

Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. Integrale von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen können in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet werden. In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden.
Summe Grundkurs Q2: 90 Unterrichtsstunden Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 58 Unterrichtsstunden

Thema: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern (LK-A1)

Zeitbedarf: ca. 18 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel,
(2) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:
Zur Reaktivierung der Vorkenntnisse der Differentialrechnung werden Funktionen vierten Grades untersucht. Dies umfasst insbesondere das hilfsmittelfreie Lösen von biquadratischen Gleichungen.

Anschließend werden zunächst Optimierungsprobleme mit ganzrationalen Funktionen ohne Parameter betrachtet. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (noch ohne die

Produkt- oder Kettenregel). Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden, ohne dass Ableitungen hilfsmittelfrei gebildet werden müssen (z.B. „Zylinder in einer Kugel“).

Anschließend werden Optimierungsprobleme bei Funktionen mit Parametern betrachtet. Hier kann z.B. auch das Problem der offenen Schachtel wieder aufgegriffen werden, indem nicht von einem Papier mit festen Maßen ausgegangen wird, sondern nur ein Seitenverhältnis der Papierseiten vorgegeben wird oder die Länge einer Seite offenbleibt, sodass bei der Zielfunktion eine Parameterabhängigkeit entsteht.

Mit vorgegebenen ganzrationalen Funktionen mit Parametern (Funktionsscharen) werden anknüpfend innermathematische Situationen (Funktionsscharen) und anwendungsbezogene Kontexte mit Parametern (z.B. Brücken, Gebäude, Flugbahnen) untersucht, bei denen Extrempunkte eine Rolle spielen. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (LK-A2)

Zeitbedarf: ca. 13 Std

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(4) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,

(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:
Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrie, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext Bildung für nachhaltige Entwicklung in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Anschließend werden mithilfe von Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechenden Kosinusfunktionen periodische Situationen (z.B. Sonnenscheindauer im Jahresverlauf) wiederholend modelliert. Dabei sollen die einzelnen Parameter mit und ohne MMS bestimmt werden.

Hinweise:

- Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig zur Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen.

Materialhinweis:

Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Thema: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen (LK-A3)

Zeitbedarf: ca. 8 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(12) untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich,

(13) erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion,

(19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Anknüpfend an das vorherige Unterrichtsvorhaben (Übergang von $a \cdot q^x$ zu $a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ und Umkehrung der Fragestellung bei Wachstumsprozessen wird der Logarithmus nun nicht nur als Operator, sondern als (Umkehr-) Funktion betrachtet. Die Umkehrbarkeit von Funktionen wird ausgehend von graphischen Darstellungen und jeweils variierenden Definitionsbereichen am Beispiel der natürlichen Exponential- / Logarithmusfunktion und an anderen passenden Funktionen (z.B. Potenz- / Wurzelfunktionen) sowie Transformationen von diesen thematisiert. In einfachen Fällen werden Funktionsterme von Umkehrfunktionen dabei hilfsmittelfrei ermittelt. Der Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion wird unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich als Symmetrie zur Winkelhalbierenden erkannt.

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird innermathematisch über den graphischen Zusammenhang zur natürlichen Exponentialfunktion (Winkelhalbierende als Symmetrieachse) und aus der Steigung einer gespiegelten Tangente hergeleitet. Damit wird der natürliche Logarithmus als Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ identifiziert.

Vertiefung:

Der Einfluss des Definitionsbereichs auf die Umkehrbarkeit kann gut am Beispiel der Sinus- und der Kosinusfunktion betrachtet werden.

Thema: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (LK-A4)

Zeitbedarf: ca. 15 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Kettenregel

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,

(10) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),

(11) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS kann das Verhalten des Differenzenquotienten für immer kleinere h betrachtet werden. Durch Variation der Stelle der Ableitung entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand (Differentialgleichung).

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse und Wachstumsprozesse mit Parametern (Funktionsscharen) betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und die Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:

Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator
(https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand (LK-A5)

Zeitbedarf: ca. 10 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
(15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
(16) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,
(17) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Rekonstruktion einer Größe (z.B. physikalische Arbeit) thematisiert, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt.

Der Einstieg sollte über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsummen) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit werden immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit dem Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Aus den übereinstimmenden Grenzwerten von Ober- und Untersummen ergibt sich die Definition des Integrals.

Hinweise:
- Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Materialhinweis:

Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden:
https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Thema: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (LK-A6)

Zeitbedarf: ca. 18 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,

(15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,

(18) begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an,

(19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$,

(20) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,

(21) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,

(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …

– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,

Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:
Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird anschaulich, kontextgebunden und numerisch begründet.

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch tiefergehend zu begründen, wird der absolute Zuwachs $I_a(x+h) - I_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In diesem Rahmen werden auch die Intervall-additivität und Linearität des Integrals formal gefasst.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen für Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet. Dabei finden sie auch heraus, dass dies nicht in jedem Fall möglich ist und es Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ gibt, für deren Stammfunktionen noch kein Funktionsterm zur Verfügung steht.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden für die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen genutzt und auf weitere zunehmend komplexe innermathematische und anwendungsorientierte Situationen übertragen. Geeignete Problemstellungen werden auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Thema: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (LK-G1)

Zeitbedarf: ca. 14 Std

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(6) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
(7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.
(2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:
Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung zunächst eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont, der später zum Verständnis der Abstandsmessung zwischen Punkten und Ebenen genutzt werden kann.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Am Beispiel der physikalischen Arbeit wird das geometrische Verständnis des Skalarprodukts veranschaulicht.

Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die besonderen formalen Eigenschaften des Skalarprodukts sowie die dafür gültigen Rechengesetze werden im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. keine Division durch einen Vektor, kein Satz vom Nullprodukt) sowie vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen thematisiert. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen. Über freie Parameter (in Lösungen aus unterbestimmten Gleichungssystemen) können Funktionsscharen erzeugt und damit ein Rückbezug zum Unterrichtsvorhaben LK-A1 hergestellt werden.

Vertiefung:
- Im Rahmen eines arbeitsteiligen Vorgehens kann ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt dahinterliegende elementargeometrische Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms. Ein ähnliches Vorgehen ist beim Beweis des Satzes des Thales möglich.

Im Sinne der Wissenschaftspropädeutik ist neben einem Einblick in die Möglichkeit einer axiomatischen Festlegung eines Skalarproduktes durch seine algebraischen Eigenschaften wichtig, dass durch ein Skalarprodukt zugleich Längen- als auch Winkelmessung in einem Vektorraum ermöglicht werden.

Vernetzung:
In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren und mögliche Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (leere Menge, eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen) schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie erneut benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme werden bei den Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen wieder aufgegriffen und geometrisch gedeutet (leere Menge, Punkt, Gerade, Ebene).

Thema: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen (LK-G2)

Zeitbedarf: ca. 10 Std

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
(4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
(5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen,
(9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.

Umsetzung:
Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an das Unterrichtsvorhaben LK-G1 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die als Punkt-Normalenform bekannte Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen wie $\vec{a} = \vec{0}$ wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die Schnittmenge zweier Ebenen wird durch Lösung eines linearen 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Dabei müssen die Lernenden eine nicht leere Lösungsmenge selbständig parametrisieren und als Schnittgerade identifizieren.

Zur Klärung der Parallelität von Geraden und Ebenen oder Ebenen untereinander werden Normalenvektoren herangezogen. Über die Normalenvektoren wird die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren auch auf Ebenen übertragen.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform[1] als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse.

Die Hesse-Normalenform[1] erlaubt es, Abstände eines Punktes von der Ebene sowie Abstände zwischen parallelen Ebenen direkt abzulesen. Dabei wird eine Verknüpfung zur Grundvorstellung der Projektion (LK-G1) hergestellt. Verfahrenstechnisch macht es keinen Unterschied, ob es sich nun um den Abstand eines Punktes, einer parallelen Geraden oder einer parallelen Ebene von einer Ebene handelt.

Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Achsenabschnittsberechnung ist dabei nur ein Spezialfall der besonders einfachen Schnittmengenberechnung zwischen Geraden und Ebenen (Durchstoßpunkt) in Koordinatenform.

Einen verständnisorientierten Zugang zur Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Ebene bietet das Lotfußpunktverfahren, das auch auf weitere Abstandsprobleme (vgl. LK-G4) übertragen werden kann.

Vernetzung:

Die Gleichungen eines linearen 2x3- oder 3x3-Gleichungssystem (LK-A2) können als Koordinatengleichungen interpretiert werden, so dass die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden kann. Ihre Dimension lässt sich aus der Lagebeziehung der Ebenen erkennen. Dabei wird deutlich, wie weit die Normalenvektoren die Lagebeziehungen zwischen 2 oder 3 Ebenen bestimmen.

[1] Die Hesse-Normalenform gehört nicht zur Obligatorik des KLP und ist damit nicht verpflichtend. Aus didaktischen Gründen wurde sie für diesen Zugang in diesem beispielhaften Plan vertiefend integriert.

Thema: Parametrisierung von Ebenen (LK-G3)

Zeitbedarf: ca. 8 Std

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
(3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
(4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
(5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
– Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
– Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben.

Die Berechnung von Schnittmengen zwischen Ebenen und Geraden ist sowohl über ein 3x3-LGS möglich, wenn beide in Parameterform vorliegen, als auch durch Einsetzen einer Geradengleichung in eine Koordinatengleichung. Für einen Wechsel zwischen Parameterform und Koordinatenform einer Ebene wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Die Entscheidung über Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden kann direkt mit der Schnittmengenberechnung verknüpft werden.

Vernetzung:
Der Unterricht wird durch den Einsatz eines MMS bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entlastet. Es ist jedoch sinnvoll, numerisch einfache Fälle auch hilfsmittelfrei zu bearbeiten, um die bereits im Unterrichtsvorhaben LK-A2 erworbenen Kompetenzen zu reaktivieren und zu festigen.

Vertiefung:
- Die Bestimmung eines Normalenvektors mit Hilfe des Vektorproduktes ist nicht primär wegen der technischen Einfachheit gewinnbringend, sondern weil die Entwicklung einer tragfähigen geometrischen Vorstellung des Vektorproduktes sowie eine Beschreibung seiner algebraischen Eigenschaften den im Unterrichtsvorhaben LK-G1 für das Skalarprodukt beschrittenen Weg weiterverfolgt und auch eine hohe Relevanz für den Physikunterricht besitzt. Vertiefend kann das Vektorprodukt für die Flächenberechnung bei Parallelogrammen und Dreiecken sowie für die Volumenberechnung beim Spatprodukt eingesetzt werden.
- Die Berechnung von Schnittmengen zwischen zwei Ebenen kann besonders einfach mit einer Gleichung erfolgen, wenn eine Ebene in Koordinaten- und eine in Parameterform gegeben ist.
- Vertiefend kann die Parallelität zwischen einer Ebene und einer Geraden durch die lineare Abhängigkeit des Richtungsvektors der Geraden von den Spanvektoren der Ebene beschrieben werden (Komplanarität).

Thema: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (LK-G4)

Zeitbedarf: ca. 6 Std

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,

(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:

Die Abstandsbestimmung erweitert sowohl die Beschreibung von Lagebeziehungen als auch die Schnittmengenproblematik. Bei Ebenen wurden Abstandsbestimmungen bereits im Unterrichtsvorhaben LK-G2 mit der Hesse-Normalenform behandelt.

Am Beispiel des Vorbeifluges eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen, insbesondere ein Lösungsweg mit den Mitteln der Analysis. Die Mittel der Analysis lassen sich auch nutzen, um im Anschluss den minimalen Abstand zweier Flugobjekte mithilfe eines MMS zu bestimmen.

Im Unterschied dazu knüpft die Abstandsberechnung von Flugbahnen an die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden aus dem Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Ihre Berechnung kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten - insbesondere unter Einschluss von Hilfsebenen - genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nicht.

Vernetzung:

Das Unterrichtsvorhaben knüpft sehr eng an das Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Insbesondere ist eine integrierende Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden und ihrer Bestimmung vorzusehen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung (E-A4) bietet sich durchgehend an und sollte unter der Maxime einer möglichst großen Lösungsvielfalt und als Chance zur Binnendifferenzierung nicht fehlen.

Thema: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder (LK-G5)

Zeitbedarf: ca. 10 Std

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
(3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
(5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
(11) führen Spiegelungen an Ebenen durch,
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
– Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
– Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:
Geometrische Körper, wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder, bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere eine Grundebene, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Durch Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) wird die Frage nach einer systematischen Untersuchung von Spiegelungen an Ebenen evoziert. Dabei wird das Verfahren der Lotfußpunktbestimmung mit Hilfe eines Normalenvektors (LK-G2) wiederaufgegriffen, wobei in der Spiegelungsebene die Schattenbilder erneut auftreten.

Abstandsbestimmungen von Punkten zu Geraden (LK-G4) und zu Ebenen (LK-G2) ermöglichen es, die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen.

Im Rahmen der Untersuchung geometrischer Körper werden Winkel zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmt. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Die Parameterform von Ebenen hat ihren Einsatz vor allem da, wo es um die Frage geht, ob ein Durchstoßpunkt einer Geraden (z.B. ein Lotfußpunkt, Schattenpunkt) eine bestimmte Fläche trifft oder außerhalb dieser liegt.

In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Dokumentation von Lösungswegen gelegt.

Vernetzung:

- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem UV E-G1 wieder auf.
- Beim Berechnen von Flächen und Volumina werden, wo möglich, auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. Vertiefend ist hier auch der Einsatz des Vektorproduktes (vgl. LK-G3) möglich.

Vertiefung:

- Virtuelle Landschaften mit Lichteffekten können im Rahmen einer begrenzten Projektarbeit/Facharbeit mit räumlicher Geometriesoftware gestaltet werden. In einem Kaleidoskop können Spiegelungen verkettet werden und so auch Drehsymmetrien erzeugt werden.

Ein MMS bietet die Möglichkeit, vertiefend das Spatprodukt bzw. die Determinante als Kontrollgröße für Volumina kennenzulernen, ohne die dahinterliegenden algebraischen Strukturen offenzulegen. Auch über die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren und speziell über den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden können damit Aussagen gemacht werden, die ein tiefergehendes geometrisches Verständnis unterstützen.

Summe Leistungskurs Q1: 200 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: ca. 130 Unterrichtsstunden

Thema: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (LK-S1)

Zeitbedarf: ca. 18 Std

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(5) bestimmen das Gegenereignis $\overline{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
(7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(8) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
(9) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
(10) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
(11) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4)	ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5)	erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6)	beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(2)	analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3)	wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(1)	erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(3)	erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(6)	verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7)	wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus.

Umsetzung:
Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS (Nutzung des Zufallsgenerators) – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

- Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Thema: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (LK-S2)

Zeitbedarf: ca. 12 Std

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
(6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel,
(7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(12) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:
Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Ausgehend von der kombinatorischen Bedeutung wird der Binomialkoeffizient im Folgenden in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel berechnet. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Vernetzung:
Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.

Thema: Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (LK-S3)

Zeitbedarf: ca. 15 Std

Inhaltsfelder: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(11) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
(13) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
(14) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,
(16) ermitteln mit Hilfe der σ-Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5)	nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9)	entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(5)	begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6)	entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Kom-(2)	beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(8)	wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(12)	nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k, p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch die Untersuchung von Binomialverteilungen mit verschiedenen n und p entwickelt. Die σ-Regeln werden benutzt, um Prognoseintervalle für unterschiedliche Sicherheitswahrscheinlichkeiten zu ermitteln und im Sachzusammenhang zu interpretieren.

Am Ende dieses Unterrichtsvorhabens bietet sich die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Stichprobenumfang und der Länge des Prognoseintervalls zu untersuchen und durch eine Visualisierung mithilfe eines MMS das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu veranschaulichen.

Thema: Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen (LK-S4)

Zeitbedarf: ca. 10 Std

Inhaltsfelder: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(15) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit,

(17) ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter p einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit),

(18) schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,
- Berechnen der Grenzen von Konfidenzintervallen im Leistungskurs,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
Ausgehend von der Modellierung einer Sachsituation (z.B. Wahrscheinlichkeit von Retouren im Onlinehandel; Glücksrad auf einer schiefen Ebene; Eichgewicht bei Lebensmittelverpackungen) mit einer Binomial-verteilung, deren Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt ist, stellt sich die Frage nach der Schätzung der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit. Eine erste Annäherung erfolgt durch die Punktschätzung der relativen Häufigkeit in einer Stichprobe (Rückschluss auf die Gesamtheit). Um zu einer Intervallschätzung zu kommen, werden zunächst mithilfe eines MMS von der Trefferwahrscheinlichkeit p abhängige 95%-Prognoseintervalle in einem Ellipsendiagramm dargestellt, deren Randfunktionen durch $h_{\pm}$ mit $h_{\pm}(p) = p \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ beschrieben werden. Mithilfe dieser Darstellung kann für eine relative Häufigkeit in einer Stichprobe ein Intervall von Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, das mit dieser Stichprobe „verträglich“ ist. Dieses Intervall wird als Konfidenzintervall bezeichnet (Rückschluss auf die Gesamtheit). Um Konfidenzintervalle für andere relative Häufigkeiten, Sicherheitswahrscheinlichkeiten (Konfidenzniveaus) und Stichprobengrößen zu ermitteln, werden die Grenzen von Konfidenzintervallen auch rechnerisch mithilfe eines MMS bestimmt. Gegen Ende des Unterrichtsvorhabens wird auch die Mindestgröße n einer Stichprobe zu einer vorgegebenen Länge eines Konfidenzintervalls abgeschätzt.

Materialhinweise:
Material: „Schätzen von Parametern – Prognose- und Konfidenzintervalle“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)
Weitere Kontexte: Politbarometer; Corona-Schnelltests, auf deren Beipackzetteln oft Konfidenzintervalle angegeben sind.

Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen (LK-S5)

Zeitbedarf: ca. 10 Std

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve"), Parameter μ und σ, Graph der Verteilungsfunktion

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion,
(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,
(21) beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve").

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dazu bietet sich an, zunächst mit einem MMS die Häufigkeiten der Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln zu simulieren, wobei in der graphischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich des Mittelwerts und der Standardabweichung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang, beispielsweise bei der Untersuchung des Abstandes der Wurftreffer zum Mittelpunkt einer Dartscheibe oder der Länge zufällig ausgewählter Schrauben.

Hervorzuheben ist im Unterricht, dass es sich bei Normalverteilungen um Wahrscheinlichkeitsverteilungen von stetigen Zufallsgrößen handelt, im Unterschied zu den bislang behandelten diskreten Zufallsgrößen.

Da auf dem MMS (und auch auf dem WTR) Normalverteilungen einprogrammiert sind, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. LK-A3).

Die Visualisierung und Berechnung von Flächen bzw. Wahrscheinlichkeiten erfolgt mithilfe eines MMS.

Der Einsatz des MMS wird zum Anlass genommen, festzustellen, dass es sich bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung („Gauß‘sche Glockenkurve“) um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion („Gauß‘sche Integralfunktion“) kein Term angegeben werden kann.

Vernetzung:
Zur Vernetzung mit Aspekten der Analysis (Grenzwertbetrachtung, Integralrechnung) bietet sich der Bezug zu uneigentlichen Integralen an.

Thema: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (LK-A7)

Zeitbedarf: ca. 20 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
(8) deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen,
(9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:
In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) hergeleitet. Die Vorstellung des Ableitens als lokale lineare Approximation wird dabei mithilfe eines MMS aufgegriffen. Die Ableitungsregeln können zunächst als Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen bzw. für einfache Verkettungen (z.B. Potenz einer ganzrationalen Funktion) aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Mindestens eine der neuen Ableitungsregeln soll bewiesen werden. An dieser Stelle sind Differenzierungen z.B. durch Einsatz eines Beweispuzzles oder Beurteilungen von vorgelegten Argumentationsketten möglich.

Mithilfe der neu gewonnenen Ableitungsregeln werden schließlich zusammengesetzte Funktionen (auch mit Exponentialfunktionen und Sinus- / Kosinusfunktionen) untersucht und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben eingesetzt. Dabei werden auch Funktionsscharen betrachtet. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Hinweis:
Die lineare Approximation stellt eine Möglichkeit dar, die Beweise der Ableitungsregeln fachlich korrekt und einsichtig zu notieren.

Thema: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (LK-A8)

Zeitbedarf: ca. 20 Std

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,

(9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,

(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen,

(23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …

– Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,

– zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
– Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
– Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:
Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anhand der Volumina von Körpern (einfache geometrische Grundkörper, Gefäße, Zeppelin, …), die sich durch Rotation eines Graphen um die x-Achse beschreiben lassen, werden verschiedene Aspekte der Differential- und Integralrechnung vernetzt und vertieft:

- Aufstellen der Randfunktion mit Definitionsbereich (Vernetzung mit Steckbriefaufgaben)
- Integralvorstellung (Kreisscheiben, Grenzwertprozess)
- Nachweis / Bildung von Stammfunktionen
- Berechnung von bestimmten Integralen

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs…), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. In geeigneten Kontexten werden uneigentliche Integrale als Grenzwert der jeweils zugehörigen Integralfunktion eingeführt und bestimmt.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) betrachtet, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen mit anderen Funktionen verknüpft werden. Integrale von zusammengesetzten Funktionen, Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen werden in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet.

Vertiefung:
- Bei der Betrachtung von Rotationskörpern bieten Hohlkörper und der Torus (z.B. Fahrradschlauch) einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Vernetzung:
Kenntnisse über uneigentliche Integrale ermöglichen ein vertieftes Verständnis der Normalverteilung und ihrer Verteilungsfunktion.

2.1.4 Inhalte des Vertiefungskurses in der Einführungsphase

1. Halbjahr

- **Funktionsbegriff** (Darstellungen einer Funktion, Funktionswerte am Graphen ablesen...)
- **lineare Funktionen**:
- Geradengleichung aufstellen (zwei Punkte, Punkt/Steigung),
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Schnittpunkte zweier Geraden
- lineare Funktionen im Sachzusammenhang
- **quadratische Funktionen:**
- Graph einer quadr. Funktion
- verschiedene Darstellungen einer quadr. Funktion (Normal,- und Scheitelpunktsform)
- quadr. Funktionen aufstellen
- quadr. Funktionen im Sachzusammenhang

2. Halbjahr

- Ableitungsregeln
- graphisches Ableiten (insb. Ableitungsgraphen und Funktionsgraphen zuordnen)
- Unterschied zwischen mittlerer und momentaner Änderungsrate (auch an konkreten Sachzusammenhängen)
- Extremstellen bestimmen
- Wendestellen bestimmen
- **Vorbereitung auf die zentrale Klausur**

2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachdidaktischen und fachmethodischen Grundsätze beschlossen.
Der individuellen Kompetenzentwicklung und den herausfordernd und kognitiv aktivierenden Lehr- und Lernprozessen wird eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Die Planung und Gestaltung des Unterrichts sollen sich deshalb an der Heterogenität der Schülerschaft orientieren.

1) Die Ziele sind transparent. Die Ziele einzelner Unterrichtsstunden und der gesamten Unterrichtsreihe des jeweiligen Unterrichtsvorhabens sind für die Schülerinnen und Schüler transparent. Ebenso ist der fachliche bzw. curriculare Zusammenhang (ggf. auch fächerübergreifend) deutlich.

2) Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen folgt konsequent dem Spiralprinzip.

   Modelle, Strategien, Fachbegriffe und wesentliche Beispiele, auf die sich die Mathematiklehrkräfte verständigt haben, werden verbindlich im Fachunterricht eingeführt und bei einer vertiefenden Behandlung wieder aufgegriffen.

3) Am Verstehen orientiertes Arbeiten baut tragfähige Vorstellungen (Grundvorstellungen) auf und korrigiert mögliche Fehlvorstellungen. Dabei stellt der Wechsel zwischen formal-symbolischen, grafischen, situativen und tabellarischen Darstellungen einen wesentlichen Baustein bei der Entwicklung eines umfassenden mathematischen Verständnisses dar.

4) Mathematisches Operieren wird durch das produktive Üben von Fertigkeiten, Routineaufgaben und algorithmische Verfahren sowie durch das Entwickeln elementarer mathematischer Vorstellungen mithilfe von Kopfübungen und vernetzenden Aufgaben ausgebaut.

5) Das reflektierte und sachgerechte Arbeiten mit digitalen Werkzeugen (wissenschaftlicher Taschenrechner, dynamische Multirepräsentationssysteme) ist Gegenstand des Unterrichts.

6) Klassenarbeiten enthalten Teile, die ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind, sowie Aufgabenstellungen, die mit analogen und/oder digitalen Hilfsmitteln zu lösen sind. Diese stehen in einem ausgewogenen Verhältnis.

7) Im Unterricht wird auf einen präzisen Sprachgebrauch und zunehmend auf eine angemessene Fachsprache geachtet. Die Fachsprache wird von den Lehrenden situationsangemessen korrekt benutzt. Lernende können zum Aushandeln mathematischer Vorstellungen und in explorativen oder kreativen Arbeitsphasen zunächst intuitive Formulierungen verwenden. In weiteren Phasen des Unterrichts werden sie dazu angehalten, die intuitiven Formulierungen zunehmend durch angemessene Fachsprache zu ersetzen.

8) Vielfältige Zugänge sind grundlegendes Prinzip zur individuellen Förderung im Mathematikunterricht.
Selbstdifferenzierende Aufgaben eröffnen dabei viele Möglichkeiten, ergänzend werden differenzierende Materialien zum individualisierten Lernen eingesetzt. Dabei werden sowohl fordernde als auch fördernde Aufgabenvariationen und Methoden eingesetzt. Lerntempo, Leistungsniveau und Lerntyp der Lernenden finden entsprechende Berücksichtigung. Der Prozess wird durch kooperative und variierende Lernformen gestützt.

9) Die Selbsteinschätzung der Lernenden wird gestärkt. Diagnosebögen/Checklisten werden zu den grundlegenden Kompetenzerwartungen eingesetzt. Darüber hinaus erhalten die Lernenden gezielte Förder- und Übungsmöglichkeiten sowie konkrete Rückmeldungen zu individuellen Stärken und Schwächen durch die Lehrkraft.

10) Die Bedeutung der Mathematik für die Lebenswirklichkeit und Lebensplanung der Schülerinnen und Schüler wird durch die

Einbindung von Alltagssituationen hervorgehoben.
Der Mathematikunterricht befähigt die Schülerinnen und Schüler dazu, geeignete Problemstellungen aus ihrem eigenen Alltag mathematisch zu modellieren und zu lösen.

11) Der fachsystematische Aufbau der Mathematik wird an zentralen Ideen und grundlegenden mathematischen Begriffen erfahrbar gemacht.
Die Schülerinnen und Schüler erkennen zunehmend die Bedeutung der Mathematik für die Wissenschaft und die damit verbundene Verantwortung für die Gesellschaft.

12) Das kreative und individuelle Betreiben von Mathematik wird im Unterricht angeregt und durch die Reflexion von Lernprozessen bewusstgemacht.
Geeignete Methoden (z.B. das Führen eines Lerntagebuchs mit individuellen Herangehensweisen und Ideen) unterstützen das Bewusstmachen der verwendeten Strategien.

13) Die Lehrkräfte unterstützen individuelle thematische Auseinandersetzungen; vielfältige Informationsquellen und ungewöhnliche Lösungsansätze bilden den Ausgangspunkt neuer Erkenntnisse.
In Klassenarbeiten sind alternative Lösungswege zugelassen, dabei ist die fachliche Richtigkeit ein zentrales Kriterium zur Bewertung.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Die Fachkonferenz hat im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen:

I. Beurteilungsbereich schriftliche Leistungen/Klassenarbeiten
Klassenarbeiten dienen der Überprüfung der Lernergebnisse nach einem Unterrichtsvorhaben bzw. einer Unterrichtssequenz und bereiten sukzessive auf die komplexen Anforderungen in der Sekundarstufe II vor. Sie geben darüber Aufschluss, inwieweit die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, die Aufgaben mit den im Unterricht erworbenen Kompetenzen zu lösen. Klassenarbeiten sind deshalb grundsätzlich in den Unterrichtszusammenhang zu integrieren. Rückschlüsse aus den Klassenarbeitsergebnissen werden dabei auch als Grundlage für die weitere Unterrichtsplanung sowie als Diagnoseinstrument für die individuelle Förderung genutzt.

Gestaltung der Klassenarbeiten
Klassenarbeiten enthalten auch Teilaufgaben, die bereits erworbene, grundlegende Kompetenzen aus anderen Unterrichtsvorhaben und Progressionsstufen erfordern (vgl. Abschnitt 2.2, Nr. 2).
Prozessbezogene Kompetenzen (Operieren, Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen und Modellieren) werden in Klassenarbeiten in angemessenem Umfang eingefordert.
In Anlehnung an die Klausurbedingungen der Oberstufe bzw. im Zentralabitur enthalten Klassenarbeiten ab der Jahrgangsstufe 7 Anteile mit Hilfsmitteln, als auch hilfsmittelfreie Teile. Im Hinblick auf die in der SII in Aufgabenstellungen verwendeten Operatoren, finden auch in der SI zunehmend operationalisierte Aufgabenstellungen Verwendung.

Korrektur und Rückgabe der Klassenarbeiten
Die Korrektur und Bewertung der Klassenarbeiten erfolgt transparent, altersgemäß und an Kriterien (vgl. „Konkretisierte Kriterien“) orientiert.
Die Schülerinnen und Schüler erhalten eine individualisierte, an Kompetenzen orientierte Rückmeldung, die auch als diagnostische Grundlage in Beratungsgesprächen und zur individuellen Förderung dient.

Dauer und Anzahl der Klassenarbeiten (vgl. APO SI VV zu §6)
Innerhalb des vorgegebenen Rahmens hat die Fachkonferenz folgende Festlegungen getroffen.

Klasse/Stufe	Anzahl	Dauer in Minuten
5	3/3	45
6	3/3	45
7	3/3	45
8	2/2 +Lernstanderhebung	60
9	2/2	90
10	2/1 + ZP10	90
EF	2/2	90
Q1.1	2	GK 90 / LK 155
Q1.2	2	GK 135 / LK 180
Q2.1	2	GK 155 / LK 225
Q2.2	1	GK 255 / LK 300

II. Beurteilungsbereich „Sonstige Leistungen“
In die Bewertung der sonstigen Leistung fließen folgende Aspekte ein, die den Schülerinnen und Schülern am Anfang des Schuljahres bekannt zu geben sind. Schülerinnen und Schülern wird in allen Klassen zunehmend Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend selbstständig vorzutragen.

- Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Qualität und Quantität der Beiträge sowie Kontinuität der Mitarbeit)
- Eingehen auf und Aufgreifen von Beiträgen und Argumentationen von Mitschülerinnen und -schülern
- Unterstützung von Mitlernenden
- Umgang mit Problemstellungen, Beteiligung an der Suche nach neuen und/oder alternativen Lösungswegen
- Selbstständigkeit beim Arbeiten
- Beteiligung während kooperativer Arbeitsphasen (Rolle in der Gruppe, Umgang mit den Mitschülerinnen und Mitschülern)
- Anfertigen selbstständiger Arbeiten, z.B. Referate, Projekte, Protokolle
- Präsentation von Ideen, Arbeitsergebnissen, Arbeitsprozessen, Problemstellungen, Lösungsansätzen, etc. in kurzen, vorbereiteten Beiträgen und Vorträgen
- Ergebnisse von kurzen schriftlichen Übungen

III. Bewertungskriterien
Die Bewertungskriterien für eine Leistung müssen auch für Schülerinnen und Schüler transparent, klar und nachvollziehbar sein.

Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung
Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klassenarbeiten und Klausuren erfolgt im Fach Mathematik in der Regel über ein Raster mit Hilfspunkten, die im Erwartungshorizont den einzelnen Kriterien zugeordnet sind. Teillösungen und Lösungsansätze werden bei der Bewertung angemessen berücksichtigt. Eine nachvollziehbare und formal angemessene Darstellung und eine hinreichende Genauigkeit bei Zeichnungen werden bei der Bewertung berücksichtigt.
Alle drei Anforderungsbereiche (AFB I: Reproduzieren, AFB II: Zusammenhänge herstellen, AFB III: Verallgemeinern und Reflektieren) werden in Klassenarbeiten und Klausuren gemäß den Bildungsstandards Mathematik zunehmend und angemessen berücksichtigt, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet. Klassenarbeiten und Klausuren, die

ausschließlich rein reproduktive Aufgabentypen (AFB I) enthalten, sind nicht zulässig.
Die Zuordnung der Hilfspunktsumme zu den Notenstufen orientiert sich an dem Notenschema der SI. Die Note ausreichend (4) soll bei Erreichen von ca. 50 % der Hilfspunkte erteilt werden. Die Notenstufen sehr gut (1) bis ausreichend (4) sollen annähernd linear auf den Bereich zwischen 50 % und 100 % verteilt werden. Die Note mangelhaft (5) soll ab etwa 20 % der maximalen Hilfspunktesumme gegeben werden. Es werden nur volle Noten in den Klassenarbeiten angegeben. Tendenzen werden in Klammern dahinter geschrieben. Bei der Punktevergabe sind alternative richtige Lösungswege gleichwertig zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 2.2, Nr. 13).
In der Sekundarstufe II soll bei Erreichen von 40 % der Hilfspunkte die Note ausreichend (4) erteilt werden. Die Notenstufen sehr gut (1) bis ausreichend (4) sollen annähernd linear auf den Bereich zwischen 40 % und 100 % verteilt werden. Die Note mangelhaft (5) soll ab etwa 20 % der maximalen Hilfspunktesumme gegeben werden.

Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen
Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Leistungen und insbesondere der mündlichen Beiträge im Unterricht nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente mit in die Bewertung ein.
Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils für eine gute bzw. eine ausreichende Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Zeugnisnote jeweils die Gesamtentwicklung der Schülerin bzw. des Schülers zu berücksichtigen (Kontinuität), eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht.

Leistungsaspekt	Anforderungen für eine	
	gute Leistung	ausreichende Leistung
	Die Schülerin, der Schüler…	
Qualität der Unterrichtsbeiträge	nennt richtige Lösungen und begründet sie nachvollziehbar im Zusammenhang der Aufgabenstellung.	nennt teilweise richtige Lösungen, in der Regel jedoch ohne nachvollziehbare Begründungen.
	geht selbstständig auf andere Lösungen ein, findet Argumente und Begründungen für ihre/seine eigenen Beiträge.	geht selten auf andere Lösungen ein, nennt Argumente, kann sie aber nicht begründen.
Kontinuität/Quantität	beteiligt sich regelmäßig am Unterrichtsgespräch.	nimmt eher selten am Unterrichtsgespräch teil.
Selbstständigkeit	bringt sich von sich aus in den Unterricht ein.	beteiligt sich gelegentlich eigenständig am Unterricht.
	ist selbstständig ausdauernd bei der Sache und erledigt Aufgaben gründlich und zuverlässig.	benötigt oft eine Aufforderung, um mit der Arbeit zu beginnen; arbeitet Rückstände nur teilweise auf.
	strukturiert und erarbeitet neue Lerninhalte weitgehend selbstständig, stellt selbstständig Nachfragen.	erarbeitet neue Lerninhalte mit umfangreicher Hilfestellung, fragt diese aber nur selten nach.
	erarbeitet bereitgestellte Materialien selbstständig.	erarbeitet bereitgestellte Materialien eher lückenhaft.
	trägt Hausaufgaben mit nachvollziehbaren Erläuterungen vor.	nennt die Ergebnisse, erläutert erst auf Nachfragen und oft unvollständig.
Darstellungskompetenz	kann ihre/seine Ergebnisse auf unterschiedliche Art und mit unterschiedlichen Medien darstellen.	kann ihre/seine Ergebnisse nur auf eine Art darstellen.
Komplexität/Grad der Abstraktion	überträgt und verallgemeinert Zusammenhänge weitgehend selbstständig.	illustriert einzelne Zusammenhänge mit konkreten Beispielen.
Kooperation/Gruppenarbeit	bringt sich ergebnisorientiert in die Gruppen-/Partnerarbeit ein.	bringt sich nur wenig in die Gruppen-/Partnerarbeit ein.

Leistungsaspekt	Anforderungen für eine	
	gute Leistung	ausreichende Leistung
	Die Schülerin, der Schüler…	
	arbeitet kooperativ und respektiert die Beiträge Anderer.	unterstützt die Gruppenarbeit nur wenig.
	führt fachliche Arbeitsanteile selbstständig und richtig aus.	führt kleinere fachliche Arbeitsanteile unter Anleitung weitgehend richtig aus.
Fachsprache	wendet Fachbegriffe sachangemessen an und kann ihre Bedeutung erklären.	versteht Fachbegriffe nicht immer, kann sie teilweise nicht sachangemessen anwenden.
	formuliert altersangemessen fachsprachlich korrekt.	formuliert nur ansatzweise altersangemessen und z. T. sprachlich inkorrekt.
Medien/Werkzeuge	setzt Medien/Werkzeuge im Unterricht sicher bei der Bearbeitung von Aufgaben und zur Visualisierung von Ergebnissen ein.	benötigt häufig Hilfe beim Einsatz von Werkzeugen zur Bearbeitung von Aufgaben.
	wählt begründet Werkzeuge und Medien aus.	nutzt vorgegebene Werkzeuge und Medien.
Projekte/Referate	findet selbstständig ein geeignetes Thema bzw. trifft begründete Entscheidungen zu Schwerpunkten und Beispielen.	wählt aus vorgegebenen Themen oder Schwerpunkten eines aus.
	präsentiert vollständig, strukturiert und gut nachvollziehbar.	präsentiert an mehreren Stellen eher oberflächlich, die Präsentation weist kleinere Verständnislücken auf.
	stellt Zusammenhänge fachlich richtig dar.	gibt Zusammenhänge z.T. fehlerhaft wieder
	trifft inhaltlich voll das gewählte Thema und hat einen klaren Aufbau gewählt.	weicht häufiger vom gewählten Thema ab oder hat das Thema nur unvollständig bearbeitet und hat keine klare Struktur verwendet.

Leistungsaspekt	Anforderungen für eine	
	gute Leistung	ausreichende Leistung
	Die Schülerin, der Schüler…	
	dokumentiert den Arbeitsprozess angemessen und nachvollziehbar.	beschreibt wesentliche Aspekte der eigenen Vorgehensweise.
	kooperiert mit der betreuenden Lehrkraft und setzt Hinweise selbstständig und angemessen um.	kann Beratung in Ansätzen umsetzen.
schriftliche Übungen	erreicht ca. 75 % der maximalen Punkte.	erreicht ca. 50 % der maximalen Punkte.

IV. Grundsätze der Leistungsrückmeldung und Beratung

Die Leistungsrückmeldung erfolgt in mündlicher und schriftlicher Form.
Die Schülerinnen und Schüler erhalten regelmäßig Leistungsrückmeldungen zur individuellen Förderung. Dabei werden insbesondere Schwerpunkte der Weiterentwicklung aufgezeigt und mögliche Wege zum Erreichen der daraus abgeleiteten Ziele mit der Schülerin/dem Schüler vereinbart.
Kurzfristige Rückmeldung kann in einem Gespräch mit einzelnen Schülerinnen oder Schülern in zeitlicher Nähe zu beobachtetem Verhalten oder erbrachten Leistungen erfolgen.
In Rückmeldungen zu Leistungsbeobachtungen über längere Zeiträume sind die erbrachten Leistungen und die Entwicklung der einzelnen Schülerin/des einzelnen Schülers mit einzubeziehen.
Erziehungsberechtigte werden nach Bedarf in die Gespräche zur Leistungsrückmeldung eingebunden.
Am Ende eines ersten Halbjahres erhalten Schülerinnen und Schüler mit nicht mehr ausreichenden Leistungen eine individuelle Lern- und Förderempfehlung, die auch in einem ausführlichen Gespräch unter Einbeziehung der Erziehungsberechtigten erläutert wird. Dabei dient die Rückmeldung dazu, erkannte Lern- und Leistungsdefizite bis zur Versetzungsentscheidung zu beheben. Hierzu werden Maßnahmen zur Aufarbeitung fachlicher Inhalte vereinbart. Dies bezieht auch schulische Förderangebote ein und wird ggf. in Abstimmung mit anderen Fachlehrkräften erstellt.
Erziehungsberechtigte können neben der Leistungsrückmeldung und Beratung im Rahmen des Elternsprechtages nach Absprache auch weitere individuelle Termine vereinbaren.

V. Facharbeit
Gemäß Beschluss der Lehrerkonferenz wird die erste Klausur im 2.Halbjahr der Q1 für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die eine Facharbeit im Fach Mathematik schreiben, durch diese ersetzt.
Die Mathematiklehrer sind dazu angehalten die Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Q1 über mögliche Themen einer Facharbeit zu informieren und die Anforderungen transparent machen.

2.4 Lehr- und Lernmittel

Auswahl ergänzender, fakultativer Lehr- und Lernmittel
Die Fachkonferenz hat sich in der Sekundarstufe I für die Einführung des Lehrwerks „Fundamente der Mathematik“ entschieden. In der Mediathek stehen weitere analoge und digitale Lehrwerke zur Verfügung.
In der Sekundarstufe II kommt ebenfalls das Schulbuch „Fundamente der Mathematik“ vom Cornelsen-Verlag zum Einsatz. Dabei wird zwischen einem Grundkurs- und einem Leistungskursbuch unterschieden.
Laut Beschluss der Lehrerkonferenz ist das Mathematikbuch ab der Klasse 6 im Eigenanteil der Eltern.
Ausgehend von diesem schulinternen Lehrplan können zusätzlich fakultative Inhalte und Themen aus Schulbüchern nachrangig zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden. Diese eignen sich in vielen Fällen zur inneren Differenzierung.
Laut Fachkonferenzbeschluss wird ab dem 9. Schuljahr regelmäßig mit der vom Ministerium zur Verfügung gestellten Formelsammlung gearbeitet. Zu Beginn der Oberstufe die für die Abiturprüfung vorgesehene Formelsammlung genutzt.
Neben der Verwendung von Lineal, Geodreieck und Zirkel ab der Jahrgangsstufe 5 wird als erstes digitales Medium in der Jahrgangsstufe 5 ein Tabellenkalkulationsprogramm eingeführt und in weiteren Unterrichtsvorhaben werden Multirepräsentationssystemen genutzt. In der Jahrgangsstufe 7 folgt die Einführung des modularen Mathematiksystems (GeoGebra). Funktionale Zusammenhänge werden ab der Jahrgangsstufe 8 außerdem mit dem softwarebasierten dynamischen Funktionenplotter oder einem entsprechenden Multirepräsentationssystem dargestellt. Alle eingeführten Werkzeuge werden im Unterricht regelmäßig eingesetzt und genutzt.

Die Fachkonferenz hat sich zu Beginn des Schuljahres darüber hinaus auf die nachstehenden Hinweise geeinigt, die bei der Umsetzung des schulinternen Lehrplans ergänzend zur Umsetzung der Ziele des

Medienkompetenzrahmens NRW eingesetzt werden können. Bei den Materialien handelt es sich nicht um fachspezifische Hinweise, sondern es werden zur Orientierung allgemeine Informationen zu grundlegenden Kompetenzerwartungen des Medienkompetenzrahmens NRW gegeben, die parallel oder vorbereitend zu den unterrichtsspezifischen Vorhaben eingebunden werden können:

- **Digitale Werkzeuge / digitales Arbeiten**
  - Umgang mit Quellenanalysen: https://medienkompetenzrahmen.nrw/unterrichtsmaterialien/detail/informationen-aus-dem-netz-einstieg-in-die-quellenanalyse/ (Datum des letzten Zugriffs: 31.01.2020)
  - Erstellung von Erklärvideos: https://medienkompetenzrahmen.nrw/unterrichtsmaterialien/detail/erklaervideos-im-unterricht/ (Datum des letzten Zugriffs: 31.01.2020)
  - Erstellung von Tonaufnahmen: https://medienkompetenzrahmen.nrw/unterrichtsmaterialien/detail/das-mini-tonstudio-aufnehmen-schneiden-und-mischen-mit-audacity/ (Datum des letzten Zugriffs: 31.01.2020)
  - Kooperatives Schreiben: https://zumpad.zum.de/ (Datum des letzten Zugriffs: 31.01.2020)

Rechtliche Grundlagen

- Urheberrecht – Rechtliche Grundlagen und Open Content: https://medienkompetenzrahmen.nrw/unterrichtsmaterialien/detail/urheberrecht-rechtliche-grundlagen-und-open-content/ (Datum des letzten Zugriffs: 31.01.2020)
- Creative Commons Lizenzen: https://medienkompetenzrahmen.nrw/unterrichtsmaterialien/detail/creative-commons-lizenzen-was-ist-cc/ (Datum des letzten Zugriffs: 31.01.2020)
- Allgemeine Informationen Daten- und Informationssicherheit: https://www.medienberatung.schulministerium.nrw.de/Medienberatung/Datenschutz-und-Datensicherheit/ (Datum des letzten Zugriffs: 31.01.2020)

2.5 Methodencurriculum

Die heutige Berufs- und Arbeitswelt erwartet zunehmend selbstorganisiertes Lernen. Von den Schülerinnen und Schülern wird nach ihrer Schulzeit verlangt, flexibel auf Veränderungen zu reagieren und sich neues Wissen in kürzester Zeit anzueignen. Dazu sind modernere Lerntechniken geeignet. Diese müssen den Schülerinnen und Schülern frühzeitig vermittelt werde. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich immer selbstständiger mit Inhalten auseinandersetzen. Aber sie sollten wissen, welche Inhalte wichtig sind, und wo sie diese Inhalte finden können (bspw. Internetrecherche). In unserer Informationsgesellschaft stellt das Wissen um Information eine wichtige Ressource dar. Die gefundenen Inhalte müssen anderen Schülerinnen und Schülern adäquat präsentiert werden können.

Im Mathematikunterricht sollen Schülerinnen und Schüler zunehmend eine individuelle Methodenkompetenz aufbauen. Weiterhin dienen Methoden als Hilfe zur Vermittlung von Inhalten. Um den Erwerb von Methodenkompetenz in der Sekundarstufe I effektiv zu gestalten, ist es neben der Vermittlung der Inhalte in den dafür vorgesehenen Stunden notwendig, Methodenlernen grundsätzlich in den Mathematikunterricht zu integrieren.

Schülerinnen und Schüler aller Stufen brauchen Arbeitstechniken, die ihnen helfen, den Schulalltag zu organisieren und ihr Lernen zu strukturieren.

Wichtig ist auch die Binnendifferenzierung zur individuellen Förderung durch den Einsatz geeigneter Methoden.

Unser Mathematik-Methodencurriculum enthält verbindliche Unterrichtsmethoden, Lern- und Arbeitstechniken. Im Sinne eines Spiralcurriculums sollen eingeführte Methoden in den höheren Jahrgangsstufen immer wieder aufgegriffen werden.

Allgemeinere und fachspezifische Methoden sollen aufeinander aufbauen und in später folgenden Schuljahren erweitert werden. Die Methoden werden in der Sekundarstufe I mit zunehmender Komplexität und steigendem Anspruchsniveau verwendet und sollten in der SII selbstverständlich sein. Auf diese Weise schaffen sich unsere Schülerinnen und Schüler eine wichtige Grundlage für die erfolgreiche Arbeit in der Oberstufe.

Im Einzelnen werden folgende Methoden in den Unterricht integriert (passende Beispiele: s. auch Stoffverteilungsplan der einzelnen Jahrgänge).

Förderung der kommunikativen Kompetenzen: Sprachsensibler Mathematikunterricht

Schülerinnen und Schüler müssen sich im Laufe ihrer Schullaufbahn immer wieder zu bekannten oder unbekannten Themen äußern und ihre Meinung argumentativ darlegen. Der Fokus soll hier auf der Schulung der rhetorischen Fähigkeiten liegen.
Weiterhin sollen Elemente wie Auftreten, Mimik und Gestik eine Rolle spielen.
Zu den spontanen Redebeiträgen kommen zunehmend vorbereitete Präsentationen, die möglichst frei präsentiert werden sollten.
In der Klasse 6 beginnen wir mit der Einübung von Kurzvorträgen

Der Vortrag / Kurzvortrag

Die Schülerinnen und Schüler erlernen die notwendigen Grundlagen des Vortragens. Hierzu gehören:
- Einsatz von Fachvokabular
- adäquater Inhalt
- freies Sprechen
- deutliches Sprechen
- angemessenes Sprechtempo
- Blickkontakt mit dem Publikum
- Auftreten: entspannt, wohin mit den Armen / Händen etc.
- angemessene Mimik und Gestik
- Einsatz von Medien (Powerpoint, Plakat, Tafel, Elmo etc.)

Diese Aspekte werden im Mathematikunterricht von Beginn an in kleinen Präsentationen geübt.
Zum Beispiel werden durch das Erstellen und Präsentieren der Hausaufgaben und Ergebnisse von Arbeitsphasen die oben genannten Aspekte eingeübt.

Förderung der kommunikativen Kompetenzen: Arbeit mit Partnern oder in Gruppen:

Partnerarbeit (PA) /Gruppenarbeit (GA)

In vielen Unterrichtssituationen ist es sinnvoll, sich mit einem Partner oder in der Gruppe auszutauschen und zu ergänzen. Das kann sowohl beim gemeinsamen Erarbeiten von Aufgaben oder bei der Erstellung einer Präsentation etc. sein.
Hier ist die Binnendifferenzierung besonders wichtig. Unterschiedliches Lern- und Arbeitstempo sowie die verschiedenen Begabungen der

Schülerinnen und Schüler können hier gut vernetzt werden. Die verschiedenen Methoden, die für Partner- oder Gruppenarbeiten geeignet sind, werden im Folgenden näher erläutert.

Lernen an Stationen / Lerntheke

Das Lernen an Stationen bietet sich als Methode zur individuellen Bearbeitung von Aufgaben/Problemen an. Man teilt in Pflicht- und Wahlstationen ein, wobei die Wahlaufgaben als Zusatzaufgaben der individuellen Förderung (Binnendifferenzierung) dienen können.
Alle Stationen können gleichzeitig zur Verfügung stehen und bearbeitet werden oder aber in einer bestimmten Reihenfolge. Dabei bewegen sich die Schülerinnen und Schüler von Station zu Station. Für die Kontrolle bieten sich Musterlösungen an, anhand derer die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse selbstständig überprüfen können.

Das Gruppenpuzzle / Partnerpuzzle

Die Methode „Gruppenpuzzle“ ist ein mehrstufiges Verfahren zur selbstständigen Erarbeitung mehrerer Teilaspekte eines Themas.
Ein ausgewähltes Thema wird in möglichst gleichwertige Puzzleteile (Teil-Themen) zerlegt.
In sog. Stammgruppen sitzen zunächst Schülerinnen und Schüler ohne spezielle Kenntnisse zusammen. Für jedes Teil-Thema sollen mit passenden Arbeitsmaterialien „Experten“ ausgebildet werden.

Die Stammgruppen lösen sich auf und die Experten der verschiedenen Themen kommen zusammen, um ihr Wissen auszutauschen.
Zur Sicherung können z.B. Arbeitsblätter dienen.
Beim Partnerpuzzle gibt es nur zwei Teilthemen. Beispiel: Partnerpuzzle „Binomische Formeln“ in Klasse 8.

Blitzlicht

Als Blitzlicht bezeichnet man ein Stimmungsbild oder ein Feedback aller Schülerinnen und Schüler zu einem Unterrichtsthema oder einer Impulsfrage. Nacheinander äußern sich dabei alle Teilnehmer kurz zu der Fragestellung.
Diese Äußerungen dürfen von den anderen weder kommentiert noch kritisiert werden. Es soll auch nicht nachgefragt werden. So bekommt man schnell einen guten Einblick in die Stimmungslage der Klasse. Die wichtigsten Äußerungen können in einem Stichwortprotokoll festhalten werden. Ein

schriftliches Blitzlicht ist ebenfalls möglich. Die Schülerinnen und Schüler formulieren einen oder zwei Sätze / Worte schriftlich.
Die Einsatzmöglichkeiten eines Blitzlichtes sind vielfältig. Es bietet sich sowohl zu Beginn, während, als auch am Ende einer Unterrichtseinheit an. Ein Blitzlicht zu Beginn oder während einer Unterrichtseinheit kann das Meinungsbild, aber auch das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zeigen. Am Ende einer Unterrichtseinheit kann diese Methode auch als Feedbackmethode genutzt werden.

Arbeit mit modernen Medien:

Internetrecherche

Die Internetrecherche ist eine der wichtigsten Form der wissenschaftlichen Nachforschung für Hausaufgaben oder Präsentationen.
Hier ist zu vermitteln, dass Internetseiten wie Wikipedia häufig fachliche Fehler beinhalten und somit allenfalls ein Einstieg in die Recherchearbeit sein dürfen.
Themenorientierte Suchaufträge werden geübt.
Auf Quellenangaben wird stets wert gelegt und das Thema Urheberrecht wird ebenfalls angesprochen. Die Schülerinnen und Schüler lernen, dass eine Quelle entweder sinngemäß nachformuliert oder als Zitat ausgewiesen werden muss.
Wichtig ist auch die Unterscheidung zwischen sachlicher Information und manipulatorischen Inhalten.

Einsatz MMS GeoGebra

Ab der Klassenstufe 7 wird das MMS GeoGebra im Mathematikunterricht eingesetzt. Der sichere Einsatz des MMS ist fest in den fachspezifischen Vorgaben des Zentralabiturs verankert und wird aus diesem Grunde frühzeitig eingeübt. Der Einsatz von GeoGebra ersetzt innerhalb des Mathematikunterrichts nicht das händische Rechnen, sondern erweitert das Repertoire an Werkzeugen um eine zusätzliche Komponente.

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Durch die unterschiedliche Belegung von Fächern können Schülerinnen und Schüler Aspekte aus anderen Kursen mit in den Mathematikunterricht einfließen lassen. Es wird Wert daraufgelegt, dass in bestimmten Fragestellungen die Expertise einzelner Schülerinnen und Schüler gesucht wird, die aus einem von ihnen belegten Fach genauere Kenntnisse mitbringen und den Unterricht dadurch bereichern. Dies wäre besonders in Anwendungsaufgaben, in denen z.B. biologische oder physikalische Fragestellungen behandelt werden, der Fall.

Exkursionen und Fahrten

In der gymnasialen Oberstufe sollen in Absprache mit der Stufenleitung nach Möglichkeit unterrichtsbegleitende Exkursionen durchgeführt werden. Diese sollen im Unterricht vor- bzw. nachbereitet werden und können auch fachübergreifend stattfinden.

So findet im 2. Halbjahr jeden Schuljahres eine Exkursion einer Klasse 9 und eines EF-Kurses in einen Freizeitpark statt, in dem physikalischen Fragestellungen nachgegangen wird, bei denen die Mathematik auch eine Rolle spielt.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Das schulinterne Curriculum stellt keine starre Größe dar, sondern ist als „dynamisches Dokument“ zu betrachten. Dementsprechend sind die Inhalte stetig zu überprüfen, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die Fachkonferenz trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches bei.
Die Fachschaft Mathematik versteht sich als eine professionale Lerngemeinschaft (PLG) mit dem Ziel, den Unterricht an unserem Gymnasium zu verbessern und weiterzuentwickeln.

Maßnahmen der fachlichen Qualitätssicherung:
Ein hohes Maß an Qualität wird durch eine zunehmende Parallelisierung des Unterrichts und einer aufbauenden Feedbackkultur gesichert. In den gemeinsamen Dienstbesprechungen der parallel unterrichtenden Lehrkräfte wird Raum geschaffen für den fachlichen und fachdidaktischen Austausch und für konkrete Absprachen über zu erreichende Ziele. Dazu dienen beispielsweise auch der regelmäßige Austausch über durchgeführte Unterrichtsvorhaben sowie die gemeinsame Konzeption von Unterrichtsmaterialien, welche hierdurch mehrfach erprobt und bezüglich ihrer Wirksamkeit beurteilt werden.
Dabei prüft das Fachkollegium kontinuierlich, inwieweit die im schulinternen Lehrplan vereinbarten Maßnahmen zum Erreichen der im Kernlehrplan vorgegebenen Ziele geeignet sind.
Freiwillige kollegiale Hospitationen im Unterricht können zudem Anlass geben, den eigenen Unterricht mit anderen Augen zu betrachten. Aus den Dienstbesprechungen wird einmal pro Halbjahr in der Fachkonferenz berichtet.
Alle Fachkollegen (ggf. auch die gesamte Fachschaft) nehmen regelmäßig an Fortbildungen teil, um fachliches Wissen zu aktualisieren und pädagogische sowie didaktische Handlungsalternativen zu entwickeln. Zudem werden die Erkenntnisse und Materialien aus fachdidaktischen Fortbildungen und Implementationen zeitnah in der Fachgruppe vorgestellt und für alle zentral digital zur Verfügung gestellt.
Darüber hinaus werden die Ergebnisse der Lernstanderhebungen in Klasse 8 (LSE 8) in der Fachkonferenz vorgestellt und von den parallel unterrichtenden Lehrkräften zur Überprüfung und Weiterentwicklung des Unterrichts aufbauend von der Jahrgangsstufe 5 genutzt. Weitergehende Diagnosen zu Beginn der Jahrgangstufen 5 und 7, sowie an der Schnittstelle zwischen Sekundarstufe I und II werden in Absprache mit den Kolleginnen und

Kollegen eines Jahrgangs eingesetzt. Dazu kann auf die Materialien aus dem Projekt SINUS.NRW2 zurückgegriffen werden.
Für Vorbereitung auf die Zentralen Prüfungen 10 (ZP10) wird auf die frei zugänglichen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre zurückgegriffen. Den Schülerinnen und Schülern wird der Zugang zu diesen Seiten ebenfalls ermöglicht. Viele Anregungen zur Gestaltung des Unterrichts sind in den jährlich erscheinenden Fachdidaktischen Rückmeldungen zu den Prüfungen enthalten. Diese werden im Rahmen der Fachgruppe Mathematik vorgestellt und als Anlass zu weiteren Unterrichtsentwicklung genommen.

Überarbeitungs- und Planungsprozess:
In der Fachkonferenz werden Möglichkeiten der Weiterentwicklung der Zielsetzungen und Methoden des Unterrichts angeregt, diskutiert und Veränderungen im schulinternen Curriculum abgestimmt. Eine Evaluation erfolgt jährlich. In den Dienstbesprechungen der Fachgruppe zu Schuljahresbeginn werden die Erfahrungen des vorangehenden Schuljahres ausgewertet und diskutiert sowie eventuell notwendige Konsequenzen formuliert. In den Jahrgangsstufenteams werden Änderungsvorschläge für den schulinternen Lehrplan vorgenommen, die im Rahmen der Fachkonferenzen abgestimmt werden. Insbesondere verständigen sie sich über alternative Materialien, Kontexte und die Zeitkontingente der einzelnen Unterrichtsvorhaben.
Die Ergebnisse dienen der/dem Fachvorsitzenden zur Rückmeldung an die Schulleitung und u.a. an die/den Fortbildungsbeauftragte/n. Außerdem sollen wesentliche Tagesordnungspunkte und Beschlussvorlagen der Fachkonferenz daraus abgeleitet werden. Von der Fachgruppe Mathematik erkannte Fortbildungsnotwendigkeiten werden der Fortbildungskoordination benannt und entsprechende schulinterne Fortbildungen beantragt.
Weitergehende, insbesondere fachliche, fachdidaktische oder methodische Fortbildungen werden bedarfsgerecht von den Lehrkräften wahrgenommen. Die Inhalte der Fortbildung werden der Fachgruppe vorgestellt und gemeinsam zur Unterrichtsentwicklung genutzt.
Um langfristig tragfähige und zielorientierte Strukturen der Zusammenarbeit in der Fachgruppe zu etablieren, ist mit der Schulleitung abgestimmt, dass die Fachschaft Mathematik die Arbeit als PLG evaluiert und ggf. im kommenden Schuljahr ein pädagogischer Tag genutzt wird, um PLG in anderen Fachschaften zu etablieren.

[2] www.sinus.nrw.de (Datum des letzten Zugriffs: 13.1.2020)

Checkliste zur Evaluation

Zielsetzung: Der schulinterne Lehrplan ist als „dynamisches Dokument“ zu sehen. Dementsprechend sind die dort getroffenen Absprachen stetig zu überprüfen, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die Fachschaft trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches bei.

Prozess: Die Überprüfung erfolgt jährlich. Zu Schuljahresbeginn werden die Erfahrungen des vergangenen Schuljahres in der Fachkonferenz ausgetauscht, bewertet und eventuell notwendige Konsequenzen formuliert.

Die Checkliste dient dazu, erkannte Stärken oder mögliche Probleme und einen entsprechenden Handlungsbedarf in der fachlichen Arbeit festzustellen und zu dokumentieren, Beschlüsse der Fachkonferenz zur Fachgruppenarbeit in übersichtlicher Form festzuhalten sowie die Durchführung und Terminierung der Beschlüsse zu kontrollieren und zu reflektieren. Die Liste wird als externe Datei regelmäßig überabeitet und angepasst. Sie dient auch dazu, Handlungsschwerpunkte für die Fachgruppe zu identifizieren und abzusprechen.

Handlungsfelder		Handlungsbedarf	Verantwortlich	Zu erledigen bis
Ressourcen				
räumlich	Unterrichts-räume			
	Bibliothek			
	Computer-raum			
	Raum für Fachteamar-beit			
	…			
materiell/ sachlich	Lehrwerke			
	Fachzeit-schriften			
	Geräte/ Me-dien			
	…			
Kooperation bei Unterrichtsvorhaben				
Leistungsbewertung/ Leistungsdiagnose				
Fortbildung				
Fachspezifischer Bedarf				
Fachübergreifender Bedarf				